Saturation of approximation processes (函数近似法の飽和)

氏名・（本籍）	鈴木義也（すずき よしや）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第304号
学位授与年月日	昭和45年12月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和38年3月 東北大学大学院理学研究科修士課程数学専攻修了
学位論文題目	Saturation of approximation processes （函数近似法の飽和）
論文審査委員	（主査）教授 洲之内 源一郎　教授 土倉 保 教授 渡利 千波

論文目次

論　文　内　容　要　旨

緒　　言

函数の近似論における飽和の概念は，与えられた函数をある近似法により，種々の線型ノルム空間で近似するときに，その近似の度合とその函数の属するクラスとの相互関係についての概念であり，J. Favardが1947年にNancyにおける調和解析のコロキュームで提示した次の問題にもとづく。

（Favardの問題）函数の，与えられた線型近似法に関して近似の最高次数と，それに到達する函数族を決定すること。

その後M. Zamansky, G. Alexits, P. L. Butzerなどによって，1949年以降，特殊な場合について特殊な方法でこの問題が解かれ，一般的な解法および最良近似との関係などについてはG. Sunouchiによって，1959年以後の一連の論文で明確にされた。

近似法の飽和の明確な定義は以下のようになされる。「$P_n(x)=P(f;x)$を$f(x)$のある線形近似法でパラメーターnを持つものとする。いま正の減少函数$\varphi(n)$と，あるtrivialでない函数族$\mathscr{A}$とが存在して

$$\| f-P_n \| = o\{\varphi(n)\}$$

となるのは$f(x)$がこの近似法の不変要素の時に限り，

$$\| f-P_n \| = o\{\varphi(n)\}$$

となるのは$f(x)\in\mathscr{A}$の時に限るならば，この近似法は飽和に達していて，その次数は$\varphi(n)$，クラスは$\mathscr{A}$であるという。更に，この概念は局所近似に関しても考えることが出来る。

著者は三角多項式及び代数多項式による近似における局所飽和に関する基本定理を与え，次にそれらを用いて，いくつかの具体的な近似法に対して局所飽和の次数とクラスを決定した。更に，飽和現象と最良近似との関連に注目して，Fourier級数のRiesz平均による函数の近似度の評価を改良した。

第1章　三角多項式近似における局所飽和

区間〔a, b〕を区間$(-\pi,\pi)$の任意に固定された1つの部分区間とするとき，$f(x)\in L^p(a,b)\cap L(-\pi,\pi)$に対して，$f(x)$の〔$a$, b〕における連続率とは

$$\omega_p(\delta, f; a, b) \equiv \sup_{h \leqq \delta} \| f(x+h)-f(x) \|_{p,(a,b)}$$

であると定義する。ここに，

$$\| f(x) \|_{p,(a,b)} \equiv \left(\int_a^b | f(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leqq p \leqq \infty)$$

$$= \max_{x\in[a,b]} | f(x) | \qquad (p=\infty)$$

であり，近似法の約束により$C(-\pi,\pi)=L^{\infty}(-\pi,\pi)$とかくことにする。

2.1　基本定理

周期2πをもつ函数$f(x)\in L(-\pi,\pi)$に対して，そのFourier級数を

$$S(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x)$$

とし，$\mathrm{Lip}(1,p;a,b)$とは函数の集合$\{f(x)\in L^p(a,b)\cap L(-\pi,\pi):\omega_p(\delta,f;a,b)=o(\delta)\}$であると定義する。今，近似法として，次の線型作用素を考える。

$$L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k^{(n)}A_k(x)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)U_n(t)\,dt,$$
$$U_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^{(n)}\cos t\geqq 0$$

ここに，〃総和函数〃$\rho_k^{(n)}$（$k=0,1,2,\cdots\cdots$）に対して$\rho_0^{(n)}=1$であり，かつnの函数$\varphi(n)=1-\rho_1^{(n)}$は正値の非増加函数で，

$$\lim_{n\to\infty}\rho_1^{(n)}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\rho_2^{(n)}}{1-\rho_1^{(n)}}=4$$

をみたすものとする。このとき，$f(x)\in L^p(a,b)\cap L(-\pi,\pi)$（$1\leqq p\leqq\infty$）に対して次の定理が成立する。

定理1　$[a_1,b_1]$を(a,b)の任意に固定された1つの部分区間とするとき，

（1°）　$\|L_n(f;x)-f(x)\|_{p,(a,b)}=o(1-\rho_1^{(n)})$ならば，$f(x)$は$[a_1,b_1]$上で一次函数である。

（2°）　$\|L_n(f;x)-f(x)\|_{p,(a,b)}=O(1-\rho_1^{(n)})$ならば$f'(x)\in\mathrm{Lip}(1,p;a_1,b_1)$

（3°）　$f'(x)\in\mathrm{Lip}(1,p;a,b)$ならば$\|L_n(f;x)-f(x)\|_{p,(a_1,b_1)}=O(1-\rho_1^{(n)})$,

簡単のために上述の定理を

$$\mathrm{L.Sat.}(L_n)=[\{f\mid f'\in\mathrm{Lip}(1,p;a,b)\},\ 1-\rho_1^{(n)},\ \mathrm{linear}]$$

とかき，L_nの局所飽和定理という。

次項から定理1の応用を述べる。

1.2　de la Vallée Poussinの特異積分に対する局所飽和

$$V_n(f;x)=\frac{h_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}A_k(x)$$
$$h_n=\frac{2n(2n-2)\cdots\cdots4.2}{(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots3.1}$$

をde la Vallée Poussinの特異積分という。

定理2

$$\text{L. Sat.}(V_n)=\{\{f \mid f'\in \mathrm{Lip}(1,p;a,b)\},\ n^{-1},\ \text{linear}\}.$$

1.3 Jackson-de la Vallée Poussinの特異積分に対する局所飽和，これは次のように定義される。

$$I_n(f;x)=\frac{1}{2\pi\tau_4}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x+\frac{2t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4dt$$

$$=\sum_{k=0}^{2n-1}h\left(\frac{k}{n}\right)A_k(x)$$

$$\tau_4=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4dt,\quad h(x)=\begin{cases}1-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}|x|^3 & \cdots\cdots |x|\leqq 1\\ \frac{1}{4}(2-|x|)^3 & \cdots\cdots 1\leqq |x|\leqq 2\\ 0 & \cdots\cdots |x|\geqq 3\end{cases}$$

定理3 $\text{L. Sat.}(I_n)=\{\{f \mid f'\in \mathrm{Lip}(1.p;a,b)\},\ n^{-2},\ \text{linear}\}.$

1.4 Gauss-Weierstrassの特異積分による局所飽和

$$W(f;x;\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{\xi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\exp(-t^2/\xi)\,dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\exp(-k^2\xi/4)A_k(x)$$

をGauss-Weierstrassの特異積分といい，$\xi\to 0$のときを考える。

定理4 $\text{L. Sat.}(W(\xi))=\{\{f \mid f'\in \mathrm{Lip}(1,p;a,b)\},\ \xi,\ \text{linear}\}.$

1.5 Generalized Jackson operatorによる局所飽和，mを任意の偶数とするとき

$$L_{n,m}(f;x)=\frac{1}{2\pi\tau_m}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x+\frac{2t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m dt,$$

$$\tau_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m dt$$

を一般化されたJacksonの作用素という。

定理5 $\text{L. Sat.}(L_{n,m})=\{\{f \mid f'\in \mathrm{Lip}(1,p;a,b)\},\ n^{-2},\ \text{linear}\}$，ここに，$m\geqq 4$とする。

（注意）1. 定理5で$m=2$のときは除く。定理5で$m=4$とおくと定理3をうる。

（注意）2. 参考論文で示されていることであるが定理1の応用例で，更に重要ないくつかのものがある。それらは，一般化されたGauss-Weierstrassの特異積分，Ostrowskiの作用素Matsuokaの作用素，Korovkinの作用素等による局所飽和定理である。

第2章 代数多項式近似における局所飽和

代数多項式による連続函数の近似に関する飽和定理はK. de Leeuw（1959年）がBernstein多項式

について考えたことにはじまり，その局所飽和定理はG. G. Lorentz（1963年）による。

著者はBernstein多項式を特別な場合として含むようなある線型作用素に対しても，局所飽和現象が起ることに注目し，これを与える一般定理を得た。近似法として次の3つの性質を有する線型正作用素 L_n を考える。L_n が正であるとは「$f(x)\geqq 0$ のとき $L_n(f;x)\geqq 0$」がいえることと定義する。$x\in[a,b]$ に対して，

P_1：$f(x)$が一次函数であるとき，$L_n(f;x)=f(x)$，

P_2：$f(x)=x^2$ のとき，$[a,b]$ で一様に

$$L_n(f;x)-f(x)=\frac{\phi(x)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ここに，$\phi(x)$ とはL_nの形に依存して定まる，連続な2次の導函数をもち，(a,b)上では0とはならない函数とする。

P_3：1より大なる正整数mが存在して，$[a,b]$ で一様に

$$L_n\{(t-x)^{2m};x\}=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

このような$L_n(f;x)$（$f(x)\in C[a,b]$）に対してはP. P. Korovkinの定理により，P_1とP_2から$[a,b]$における$L_n(f;x)$の$f(x)$への一様収束性が出るし，P_3の性質は収束の度合に関係してくる。

2.1 基本定理

$0\leqq a<b\leqq R$なる実数値a，b，Rが与えられたとき

$$a<a_1<a_2<\alpha<\beta<b_2<b_1<b$$

となるようにa_1，a_2，α，β，b_2，b_1を任意に定め，次の函数の族Uを導入する。

$$U\equiv\{u(x)=\phi(x)q(x),\ x\in[0,R]\mid q(x)\in C^2[0,R]\ \text{かつ}\ (\alpha,\beta)\ \text{の外では}\ 0\ \text{である}\}$$

次に，$f(x)\in C[a,b]$ と$L_n(f;x)$に対して，汎函数$A_n(f)$を次のように定義する。

$$A_n(f)=2\sum_{na<k<bn}\frac{L_n\left(f;\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)}{\phi\left(\frac{k}{n}\right)}u\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=2\sum_{na_1<k<b_1n}\left[L_n\left(f;\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]q\left(\frac{k}{n}\right)$$

このとき，$\|g(x)\|_{(a,b)}\equiv\max_{x\in[a,b]}|g(x)|$，$g(x)\in C[a,b]$とするとき次の定理が成立する。

定理1　$L_n(f;x)$は$f(x)\in C[a,b]$に対して定義される線型正作用素で，性質P_1，P_2，P_3をみたすものとする。

（1°）　ある絶対定数Kが存在して，任意の$g(x)\in C[a,b]$に対して，（＊）$|A_n(g)|\leqq K\|g\|_{(a,b)}$ であり，更に

$$|L_n(f;x)-f(x)|<\frac{M\phi(x)}{2n},\quad x\in[a,b],\ (n=1,2,\cdots\cdots)$$

であるとき，$[a,b]$ 上で $f'(x)\in \mathrm{Lip}_M 1$.

（2°）（1°）の仮定に加えて，〔a_1, b_1〕の殆んどすべての点で，

$$L_n(f;x)-f(x)=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成立すれば，$f(x)$ は〔a_1, b_1〕で一次函数である。

（3°）$f'(x)\in \mathrm{Lip}_M$ が〔a_1, b_1〕でいえるとすれば〔a_2, b_2〕で一様に

$$|L_n(f;x)-f(x)|<\frac{M\phi(x)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成立する。ここに，$g(x)\in \mathrm{Lip}_M 1$ とは $x, x'\in$〔a, b〕について，

$$|g(x)-g(x')|\leqq M|x-x'|$$

が成立することである。

この事実を簡単に

$$L.\,\mathrm{Sat.}(L_n)=[\{f\,|\,f'\in \mathrm{Lip}_M 1\},\ n^{-1},\ \mathrm{linear},\ \phi(x)]$$

とかくことにする。

2.2　定理1の応用例

(1)　Bernstein多項式$B_n(f;x)$は$f(x)\in C$〔0, 1〕に対して

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

と定義される。

(2)　Szász の作用素$S_n(f;x)$は$f(x)\in C$〔0, ∞〕に対して

$$S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{k!}(nx)^k$$

と定義される。

(3)　Baskakov の作用素$V_n(f;x)$は$f(x)\in C$〔0, ∞）に対して

$$V_n(f;x)=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+k-1)}{k!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

と定義される。これらについて次定理が成立する。

定理2

（1°）$L.\,\mathrm{Sat.}(B_n)=[\{f\,|\,f'(x)\in \mathrm{Lip}_M 1\},\ n^{-1},\ \mathrm{linear},\ x(1-x)]$

（2°）$L.\,\mathrm{Sat.}(S_n)=[\{f\,|\,f'(x)\in \mathrm{Lip}_M 1\},\ n^{-1},\ \mathrm{linear},\ x]$

（3°）$L.\,\mathrm{Sat.}(V_n)=[\{f\,|\,f'(x)\in \mathrm{Lip}_M 1\},\ n^{-1},\ \mathrm{linear},\ x(1+x)]$

（注意）1.　定理2の（1°）はG. G. Lorentzによって得られた結果である。

（注意）2.　参考論文で示したことであるが，定理1での仮定(＊)を$A_n(f)$の代りに

$$\widetilde{A_n}(f)=2\sum_{a<\frac{k}{k+n}<b}\frac{n^2}{(k+1+n)(k-1+n)}\left[L_n\left(f;\frac{k}{k+n}\right)-f\left(\frac{k}{k+n}\right)\right]q\left(\frac{k}{k+n}\right)$$

がみたしていても定理1は成立する。この事実を用いると，Meyer-Köning and Zeller の

の作用素

$$M_n(f;x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}f\left(\frac{\nu}{\nu+n}\right)\binom{\nu+n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n+1};\quad f(x)\in C\,[0,1]$$

に関する局所飽和定理：

$$\text{L. Sat.}(M_n)=[\{f\mid f'\in \mathrm{Lip}_M 1\},\ n^{-1},\ \text{linear},\ x(1-x)^2]$$

を得る。

代数近似においては〃逆の問題〃，即ち近似度から函数の構造的性質を出すことは極めて困難であることが多いし，一般に甚だ微妙な計算が必要となることを付記する。

第３章　飽和理論の応用

Fourier 級数のRiesz 平均による函数近似を考える。

$f(x)$を周期2πをもつ，$(-\pi,\pi)$での可積分函数とし，そのRiesz 平均を

$$R_n(f,x)=A_0+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)A_1(x)+\cdots\cdots\cdots+\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)A_{n-1}(x)$$

$$\varphi(u)=(1-u^{\beta})^{\delta}\qquad(\beta,\ \delta>0)$$

とする。ここに，$\varphi(u)$は$[0,1]$で定義された函数で，$(0,1)$で有界変分，$\varphi(0)=1$とする。

定理１　$f(x)$はr回微分可能で，更に$f^{(r)}(x)\in \mathrm{Lip}_M\alpha\ (0<\alpha\leqq 1)$とすると

（１°）　$|R_n(f;x)-f(x)|=o\left(\frac{1}{n^{\alpha+r}}\right)$ ………$\beta>\alpha+r$のとき，

（２°）　$|R_n(f;x)-f(x)|=o\left(\frac{\log n}{n^{\alpha+r}}\right)$ ………$\beta=\alpha+r$のとき，

（３°）　$|R_n(f;x)-f(x)|=o\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right)$ …………$\beta<\alpha+r$のとき，

更に，（２°）でとくに，$\beta=r$が偶数で，$\alpha=0$のときは

$$|R_n(f,x)-f(x)|=o\left(\frac{1}{n^{r}}\right)$$

この定理は$f(x)$の$R_n(f;x)$による一様近似の度合についてのSz Nagyによる定理を〃飽和〃の立場から考察して得られる。

（注意）1.　Nagy の結果では近似度がδに関係していたが，定理１から，実は無関係であることが知られる。

（注意）2.　$\delta=1$で，βが整数のときはZygmund（1945年）による。

論文審査結果の要旨

関数の近似法が線型作用素によって与えられている場合は所謂飽和の現象が起ることが多い。ここに飽和というのは次のように定義される。

$P_n(f, x)$をfのある近似法とするとき，正の減少関数$\varphi(n)$とある関数族Kとが存在し$\|f-P_n\|=o\{\varphi(n)\}$となるのは$f$が近似法の不変元の時に限り，$\|f-P_n\|=O\{\varphi(n)\}$となるのは$f\in K$の時に限るならばこの近似法は次数$\varphi(n)$，関数族$K$で飽和に達しているという。関数近似論において飽和族と次数を求めることは最良近似とも密接な関係があり，基本的な問題の一つである。

著者はまず第一章で正の三角多項式近似における局所飽和の一般定理を示している。特にそのうち近似法が

$$P_n(f, x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)U_n(t)\,dt$$

$$U_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(n)}\cos n\ t\geqq 0$$

の形で　$\lim\limits_{n\to\alpha} \rho_1^{(n)}=1$,　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\rho_2^{(n)}}{1-\rho_1^{(n)}}=4$

が成立するものだけに限定して，非常に扱い易い一般定理を与えた。この応用としてJackson, Gauss-Weierstrass，Ostrowski，Korovkin の作用素などに関する局所飽和族と次数を決定した。

第二章では代数多項式に関する一様近似について局所飽和の問題を取扱っている。代数多項式は上の三角多項式と異り交換可能でないので，困難な点が多い。にも拘らず筆者は関数解析的手法により可成り広範囲の作用素に対してあてはまる一般定理を得た。これは汎関数

$$A_n(f)=\sum_{na<k<nb}\frac{P_n(f, k/n)-f(k/n)}{\phi(k/n)}\ u(k/n)$$

についてその有界性$|A_n(f)|\leqq k\|f\|$，$f\in C(a, b)$ を示すことができれば飽和の問題が解けるという一般論を与えたのである。これを利用してBernstein, Szász, Baskakov, Meyer-König-Zeller の作用素について，局所飽和の問題を解決した。

第三章では飽和近似と最良近似との関係によってNagyが与えたRiesz 平均による近似度を改良したものである。

以上のべたように筆者は主として正の線型作用素に限ったのであるが，局所飽和の一般定理を与え，その応用として種々の近似法の飽和の問題をかなり統一的に解決したもので，この方面の研究に寄与する所大であると考える。

よって鈴木義也提出の論文は理学博士の学位論文として合格と認める。